CONCOURS 1984

OPTION M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée : 4 heures

L'espace affine euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{E}$, est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(\mathcal{R}) = (O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$.

On rappelle que toute sphère (S) de $\mathcal{E}$ admet dans le repère $(\mathcal{R})$ une unique équation, dite équation normale, de la forme :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Dans tout le problème (Γ_1) et (Γ_2) désignent deux courbes planes de $\mathcal{E}$ définies par leurs équations cartésiennes dans le repère $(\mathcal{R})$:

$$(\Gamma_1)\ \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \qquad (\Gamma_2)\ \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

I

1° On considère la famille de sphères (S_t) de centre $M_t\ (x_t, y_t, 0)$ point de (Γ_1) et de rayon $\dfrac{x_t}{\sqrt{2}} + 1$. Écrire l'équation normale de (S_t) dans le repère $(\mathcal{R})$ sous la forme $F(x, y, z, x_t, y_t) = 0$.

2° On appelle (π_1) la surface dont une équation cartésienne est obtenue en éliminant dx_1 et dy_1 entre

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, y, z, x_1, y_1)\, dx_1 + \frac{\partial F}{\partial y_1}(x, y, z, x_1, y_1)\, dy_1 = 0$$

et la différentielle de $\frac{x_1^2}{2} + y_1^2$. (On rappelle que $M_1(x_1, y_1, 0)$ décrit (Γ_1).)

Reconnaître la surface (π_1).

3° L'intersection de (S_1) et de (π_1) est un cercle (C_1). Déterminer son rayon en fonction de r_1 et les coordonnées de son centre en fonction de x_1 et y_1.

4° Lorsque M_1 décrit (Γ_1) montrer que (C_1) reste contenu dans une surface (Σ) dont une équation cartésienne dans le repère $(\mathcal{R})$ a pour premier membre un polynôme de degré 4 en x, y, z.

5° (S) étant la sphère de $\mathcal{E}$ d'équation normale $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ dans le repère $(\mathcal{R})$ montrer que toute sphère (S_1) coupe (S) et calculer l'angle des plans tangents à (S) et (S_1) en tout point de l'intersection de ces deux sphères.

6° Déterminer les intersections de (Σ) (cf. I. 4°) avec les plans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et $(O ; \vec{i}, \vec{k})$. (On vérifiera que ces intersections se réduisent à des cercles ou à des points.)

7° On appelle (Γ) la courbe intersection de (Σ) avec le plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

a. En prenant comme axe polaire $(O ; \vec{j})$ et en choisissant l'orientation du plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$ qui fait de $(\vec{j}, \vec{k})$ une base de sens direct, trouver une représentation polaire de (Γ). (On désignera par θ l'angle $(\vec{j}, \overrightarrow{OM})$ si $M \in (\Gamma)$.)

b. Déterminer les points de (Γ) où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{j}$ et ceux où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

c. On oriente (Γ) dans le sens des θ croissants. Calculer la courbure en un point M de paramètre θ. En déduire la concavité de (Γ).

Tracer (Γ).

II

1° On considère maintenant la famille de sphères (S_2) de centre $M_2(x_2, 0, z_2)$ point de (Γ_2) et de rayon $|x_2\sqrt{2} + 1|$.

a. Montrer que toute sphère (S_2) est tangente à toute sphère (S_1).

b. Écrire l'équation normale de (S_2) dans le repère $(\mathcal{R})$ sous la forme

$$G(x, y, z, x_2, z_2) = 0$$

2° On appelle (π_2) la surface dont une équation cartésienne est obtenue en éliminant dx_2 et dz_2 entre l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial x_2}(x, y, z, x_2, z_2)\, dx_2 + \frac{\partial G}{\partial z_2}(x, y, z, x_2, z_2)\, dz_2 = 0$$

et la différentielle de $x_2^2 - z_2^2$. (On rappelle que $M_2(x_2, 0, z_2)$ décrit (Γ_2).)
Reconnaître (π_2).

3° L'intersection de (S_2) et (π_2) est un cercle (C_2). Lorsque M_2 décrit (Γ_2) montrer que (C_2) reste contenu dans une surface (Σ') dont une équation cartésienne dans le repère $(\mathcal{R})$ a pour premier membre un polynôme de degré 4 en x, y, z. Comparer (Σ') et (Σ). (Cf. I. 4°).

4° *a.* Montrer que par tout point M de (Σ) passe un unique cercle (C_1) (cf. I. 3°).

b. Trouver un point Ω de (Σ) par lequel passent tous les cercles (C_2). Montrer que par tout point de (Σ) autre que Ω et n'appartenant pas à la réunion de deux cercles $(\Delta) \cup (\Delta')$ que l'on déterminera il passe un unique cercle (C_2).

5° Soit (Σ_0) la surface obtenue en supprimant sur (Σ) les points de (Δ) et ceux de (Δ').

a. Si M désigne un point de (Σ_0), on appelle (S_1) la sphère de centre $M_1(x_1, y_1, 0)$ point de (Γ_1) de rayon $\frac{x_1}{\sqrt{2}} + 1$ contenant l'unique cercle (C_1) passant par M et (S_2) la sphère de centre $M_2(x_2, 0, z_2)$ point de (Γ_2) de rayon $|x_2\sqrt{2} + 1|$ contenant l'unique cercle (C_2) passant par M. Montrer que le plan tangent en M à (Σ_0) est tangent en M à (S_1) et (S_2).

b. Si M désigne un point de $(\Delta) \cup (\Delta')$ différent de Ω et (S_1) la sphère contenant l'unique cercle (C_1) passant par M montrer que le plan tangent en M à (Σ_0) est tangent en M à (S_1).

P 156

6° Soit (C_1) le cercle défini comme intersection d'une sphère (S_1) et du plan (π_1). (On suppose que le centre M_1 de cette sphère n'est pas Ω). Montrer que lorsque M décrit (C_1) les normales en M à (Σ) constituent un cône de révolution. Caractériser l'axe de ce cône par rapport à (Γ_1).

III

On considère trois sphères de la première famille : (S_1) de centre M_1 $(\sqrt{2}, 0, 0)$; (S'_1) de centre M'_1 $(0, 1, 0)$; (S''_1) de centre M''_1 $(0, -1, 0)$.

1° Étudier l'intersection $(S_1) \cap (S'_1) \cap (S''_1)$.

2° On cherche un cercle orthogonal aux trois sphères (c'est-à-dire un cercle qui coupe les trois sphères et tel qu'en chaque point d'intersection la tangente au cercle est normale à la sphère concernée). Montrer que le plan d'un tel cercle, s'il existe, ne peut être que $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Prouver qu'il existe un unique cercle (C) répondant à la question.

3° Soit $\mathcal{F}$ l'application de $\mathcal{E} \setminus \{O\}$ dans lui-même qui à tout point M de $\mathcal{E}$ autre que O associe M' défini par $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|^2} \cdot \overrightarrow{OM}$. Déterminer les images par $\mathcal{F}$ de (S_1) ; $(S'_1) \setminus \{O\}$; $(S''_1) \setminus \{O\}$.

Vérifier que l'image de $(C) \setminus \{O\}$ par $\mathcal{F}$ est normale aux images précédentes.

4° Trouver une équation cartésienne de l'image (Σ'') de (Σ) par $\mathcal{F}$ (cf. I. 4°).

Montrer que (Σ'') est une surface de révolution. Déterminer son axe.

Calculer le volume de la portion de $\mathcal{E}$ limitée par (Σ'').